PART3　ベクトル方程式

3 点 $(1,\ 2,\ 0)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2点 $(4,\ 2,\ 0)$，$(5,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする。また，点 $(2,\ 2,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面を S とする。

(1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ。

(2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ。

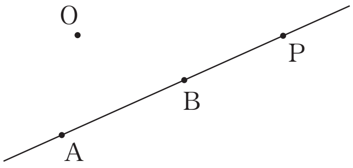
(3)　球面 S の方程式を求めよ。また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ。

Point Pickup

点 P が直線 AB 上の点

$\iff$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\iff$　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を，直線 AB の方向ベクトルという。

中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

第 14 講　PART3　確認問題

点 $(3,\ 2,\ 3)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線を l，

2 点 $(1,\ 0,\ 3)$，$(1,\ 4,\ -5)$ を通る直線を m とする。

1 (1)　直線 l と zx 平面の交点の座標を求めよ。

$$\left(\boxed{ア},\ \boxed{イ},\ \boxed{ウ}\right)$$

(2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ。

$$\sqrt{\boxed{エ}}$$

2 点 $(-1,\ 1,\ 2)$ を中心とする半径 3 の球面を S とする。球面 S の方程式を求めよ。また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ。

球面 S の方程式は

$$\left(x+\boxed{オ}\right)^2+\left(y-\boxed{カ}\right)^2+\left(z-\boxed{キ}\right)^2=\boxed{ク}$$

直線 l のベクトル方程式は，t を実数とすると

$$(x,\ y,\ z)=\left(t+\boxed{ケ},\ \boxed{コ}t+\boxed{サ},\ t+\boxed{シ}\right)$$

よって，球面 S と直線 l は $\boxed{ス}$

[$\boxed{ス}$ の選択肢]

①　共有点をもつ。　　　②　共有点をもたない。

PART3　ベクトル方程式

3　点 $(1,\ 2,\ 0)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2点 $(4,\ 2,\ 0)$，$(5,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする。また，点 $(2,\ 2,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面を S とする。

(1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ。

(2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ。

(3)　球面 S の方程式を求めよ。また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ。

(1)　直線 l の方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 0)+t(1,\ 1,\ -1)=(1+t,\ 2+t,\ -t)\ (t\text{ は実数})$$

直線 l と yz 平面，すなわち $x=0$ との交点は $1+t=0$ より $t=-1$ のときで，その座標は

$$(0,\ 1,\ 1)$$

(2)　直線 m の方向ベクトルの 1 つは $(1,\ 1,\ 0)$ であるから，その方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(4,\ 2,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)=(4+s,\ 2+s,\ 0)\ (s\text{ は実数})$$

よって，2 点 P，Q の座標は

$$\mathrm{P}(1+t,\ 2+t,\ -t),\ \mathrm{Q}(4+s,\ 2+s,\ 0)$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(s-t+3)^2+(s-t)^2+t^2\\&=2s^2-2(2t-3)s+3t^2-6t+9\\&=2\left(s-t+\frac{3}{2}\right)^2+t^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

よって，PQ^2 は $s-t=-\dfrac{3}{2}$ かつ $t=0$　すなわち，$t=0$，$s=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる。

$\mathrm{PQ}>0$ より，求める最短距離は $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(3)　中心 $(2,\ 2,\ 1)$，半径 $\sqrt{3}$ の球面 S の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$$

これに $x=1+t$，$y=2+t$，$z=-t$ を代入して

$$(t-1)^2+t^2+(-t-1)^2=3 \qquad t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって，実数 t が存在するので，球面 S と直線 l は共有点をもつ。

第14講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5，イ：0，ウ：5，エ：6

[解説]

(1)　直線 l のベクトル方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 3)+t(1,\ -1,\ 1)$$ [A]

$$=(t+3,\ -t+2,\ t+3)$$ （t は実数）

直線 l と zx 平面，すなわち $y=0$ の交点は

$-t+2=0$ より $t=2$ のときで，その座標は

(5，0，5)

(2)

$$(1,\ 4,\ -5)-(1,\ 0,\ 3)=(0,\ 4,\ -8)$$
$$=4(0,\ 1,\ -2)$$

より，直線 m の方向ベクトルの1つは，

$(0,\ 1,\ -2)$ であるから，直線 m のベクトル方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 3)+s(0,\ 1,\ -2)$$ [A]

$$=(1,\ s,\ -2s+3)$$ （s は実数）

よって，2点P，Qの座標は

$P(t+3,\ -t+2,\ t+3)$

$Q(1,\ s,\ -2s+3)$

と表される。このとき

$$PQ^2=(t+2)^2+(s+t-2)^2+(2s+t)^2$$
$$=3t^2+6st+5s^2-4s+8$$
$$=3(t+s)^2+2(s-1)^2+6$$

よって，PQ^2 は，$t+s=0$ かつ $s=1$　すなわち　$t=-1$，$s=1$ のとき最小値6をとる。

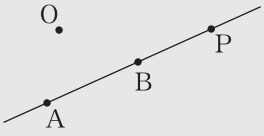
$PQ>0$ より，求める最短距離は　$\sqrt{6}$

[A]　点Pが直線AB上の点

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ を，直線ABの方向ベクトルという。



2

[正解] オ：1，カ：1，キ：2，ク：9，ケ：3，
コ：－，サ：2，シ：3，ス：②

[解説]

中心 $(-1,\ 1,\ 2)$，半径 3 の球面 S の方程式は

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9 \quad \cdots\cdots(*)$$ [B]

> [B]　中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は
> $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

直線 l のベクトル方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 3)+t(1,\ -1,\ 1)$$ [A]

$$=(t+3,\ -t+2,\ t+3) \quad \cdots\cdots(**)$$

（t は実数）

$(**)$を$(*)$に代入して

$$(t+4)^2+(-t+1)^2+(t+1)^2=9$$

$$3t^2+8t+9=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4^2-3\times 9=-11<0$$

よって，この 2 次方程式を満たす実数 t は存在しないから，球面 S と直線 l は**共有点をもたない**。